S-MT1

Concours EAMAC 2016	Cycles TECHNICIEN SUPERIEUR et TECHNICIEN	Epreuve de MATHEMATIQUES

<u>Exercice MT1-1 :</u> (3 points)

1. Vérifier que pour tout réel x, on a : $\dfrac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \dfrac{e^x}{1+e^x} - \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx.$

3. a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^3}$.

   b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx.$

Exercice MT5- 2 *(*5 points)

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel.

1°) On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2°)
a) On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux. Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.
b) On désigne par A l'événement : « aucun animal n'est malade parmi les 10 ». On désigne par B l'événement : « au moins un animal est malade parmi les 10. ». Calculer les probabilités de A et de B.

3°) On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'événement : « avoir un test positif à cette maladie » et M l'événement : « être atteint de cette maladie ».

a) Représenter par un arbre pondéré les donnés de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité de l'événement T.

c) Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

<u>Exercice MT1-4 :</u> (7 points)

I. Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. (1point)

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0,78 \leq \alpha \leq 0,79$.

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et déterminer les limites de f aux bornes de cet ensemble (1,5 point)

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

   b. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

3. a. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$.

   b. Etudier les branches infinies de (C).

4. Construire (C) (On prendra $\alpha = 0,785$) .

EXERCICE MT4-3 (5pts)

1°) Donner sous forme trigonométrique les solutions de l'équation (E) :
$z \in \mathbb{C}$, $z^3 = 4\sqrt{2}\left(-1+i\right)$.

2°) Calculer $\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^3$; en déduire que l'équation précédente est équivalente à

$\left(\dfrac{z}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^3 = 1$.

3°) En utilisant les racines cubiques de l'unité, donner sous forme algébrique les solutions de l'équation (E).

4°) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.