EAMAC – 2014 - SUJET M-T-7

Exercice 1 (4 points)

1) Résoudre l'équation différentielle : $2y'+y=0$ (E) où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On considère l'équation différentielle : $2y'+y=e^{-\frac{x}{2}}(x+2)$ (E')

a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}(ax^2+bx)$ soit une solution de (E').

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que : g est solution de (E') si et seulement si $f-g$ est solution de (E).

c) Résoudre l'équation (E').

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction numérique u définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x)=1-\ln x$.

1) Etudier le signe de $u(x)$.

2) Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x(1-\ln x)$

a) Déterminer $g'(x)$.

b) En déduire une primitive U de u sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en e^2.

3) On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n=\int_{e^{-n}}^{e^{-n+1}}(1-\ln x)dx$

a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \geq 0$.

b) Calculer v_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de v.

4) Pour tout entier naturel n, on pose : $s_n=\sum_{k=0}^{n}v_k=v_0+v_1+...+v_n$.

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de S_n.

Exercice 3 (5 points)

1. Reproduire et compléter le tableau suivant:

z	$1+i$	2	$1-i$	$i\sqrt{2}$	$1+i\sqrt{3}$	$-1+i$	$1-i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+i$	$2i$	-3
z												
$\arg z$												

Une boîte contient $\mathbf{12}$ cartons, indiscernables au toucher, portant les $\mathbf{12}$ nombres complexes du tableau précédent (Chaque carton porte un seul nombre complexe):

2. On tire au hasard un carton de la boîte (On suppose l'équiprobabilité des tirages).

a) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre réel?

b) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont le module est égal à $\sqrt{2}$?

c) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont un argument θ est tel que: $0 \leq \theta \leq \pi/2$?

3. Un jeu consiste à tirer un carton de la boîte précédente. Si le nombre complexe inscrit sur le carton tiré est de module $\mathbf{3}$, le joueur gagne $\mathbf{10\,000}$ points et le jeu s'arrête. Sinon, le carton tiré est remis dans la boîte et le joueur procède à un deuxième tirage; si ce carton porte un nombre complexe de module $\mathbf{3}$, le joueur gagne $\mathbf{8\,000}$ points, s'il est de module $\mathbf{2}$, il gagne $\mathbf{5\,000}$ points sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

Soit $\mathbf{X}$ la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de $\mathbf{X}$ (On pourra s'aider d'un arbre).

b) Calculer l'espérance mathématique de $\mathbf{X}$.

Exercice 4 (points)

1) On considère la fonction $\mathbf{g}$ définie sur $\mathbf{R}$ par : $\mathbf{g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2}$.

a) Dresser le tableau de variations de $\mathbf{g}$.

b) Montrer que $\mathbf{g}$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur R.

c) Montrer que l'équation $\mathbf{g(x) = 0}$ admet dans $\mathbf{R}$ une unique solution α telle que $\mathbf{0{,}6 \leq \alpha \leq 0{,}7}$.

2) On considère la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $\mathbf{R}$ par : $$\mathbf{f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}}.$$

a) Calculer $\mathbf{f'(x)}$, puis vérifier que $\mathbf{f'(x) = \dfrac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}}$

b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$.

c) Tracer la courbe représentative $\mathbf{(C)}$ de $\mathbf{f}$ dans un repère orthogonal $\mathbf{(O;\vec{i},\vec{j})}$ avec $\mathbf{\|\vec{i}\| = 1cm, \|\vec{j}\| = 5cm}$.

3) On considère la suite numérique $\mathbf{(U_n)}$ définie pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 1}$ par :

$$\mathbf{U_n = \int_n^{n+1} f(t)dt}.$$

On ne cherche pas à calculer l'intégrale $\mathbf{U_n}$

a) Montrer que pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 1}$: $\mathbf{0 \leq U_n \leq (1 - \frac{1}{e})e^{-n}}$. En déduire $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n}$.

b) Déterminer un entier naturel $\mathbf{n_0}$ tel que pour tout $\mathbf{n \geq n_0}$, $\mathbf{0 \leq U_n \leq 10^{-5}}$.