Concours EAMAC 2021	Cycles : INGENIEUR et EXPLOITATION EN AERONAUTIQUE CIVILE	EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

Durée : 04 heures

Exercice 1 (5 points)

Soit $n \in IN^*$. On note $\omega = \exp(i\frac{2\pi}{n})$ et on considère la matrice carrée M, d'ordre n, dont le terme général situé sur la ligne p et la colonne q est :

$$m_{pq} = \omega^{(p-1)(q-1)}$$

1) Calculer M^2.
2) En déduire $|\det(M)|$

Exercice 2 (5 points) : On note E l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que :

Pour tout $n \in IN$, $u_{n+2} = 5\, u_{n+1} - 6\, u_n$

On note (a_n), (b_n) les éléments de E définis par : $(a_0 = 1, a_1 = 0)$, $(b_0 = 0, b_1 = 1)$,

et on note $r = (2^n)$, $s = (3^n)$, $n \in IN$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur IR et que (a_n, b_n) et (r, s) sont des bases de E.
2. Déterminer la matrice M de la famille (a_n, b_n) dans la base (r, s) de E et calculer M^{-1}
3. Montrer que l'application f qui à tout $u = (u_n)_{n \in IN}$ *de E* associe $(u_{n+1})_{n \in IN}$

est un endomorphisme de E, et préciser la matrice de f dans la base (a_n, b_n) de E et la matrice de f dans la base (r, s) de E.

Exercice 3 (5 points)

1. Donner une décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{x-1}{x^3+3x^2+2x}$
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^3+3n^2+2n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4 (5 points)

Soit la fonction f définie sur R^* par :

$$f(x) = x\ln(|x|).$$

1) Etudier les variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative.

2) Etudier le signe de la fonction g définie sur R^* par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

3) En déduire la convergence de la suite numérique $(u_n)_{n\in N}$ telle que :

$$u_0=3 \text{ et } \forall\, n \in N, u_{n+1} = f(u_n).$$