CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES DE TECHNICIEN SUPERIEUR ET TECHNICIEN DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)

SESSION 2012

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice 1 (3*pts*)

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

1. $I = \int_0^1 \ln(x+1)\, dx$
2. $J = \int_{\frac{1}{e}}^{e} -\frac{\ln x}{x^2} dx$

Exercice 2 (5*pts*)

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par: $f(z) = z^3 + (2+3i)z^2 + (4+6i)z + 8$.

1. a. Calculer $f(i)$
   b. Déterminer deux nombres complexes a et b vérifiant: $f(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$ pour tout nombre complexe z.
   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = 0$.

2. On désigne par z_1 la solution de (E) ayant une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 l'autre solution.
   Montrer qu'il existe un nombre complexe q tel que $z_2 = qz_1$ et $z_3 = qz_2$.
   Soient A_1, A_2, et A_3 les points du plan complexe d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
   Quelle est la nature du triangle $A_1A_2A_3$? (Justifier).

Exercice 3 (5*pts*)

Soit la suite numérique de terme général u_n, n appartenant à $\mathbb{N}^*$, définie par:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$
   En déduire que la suite (u_n) converge.

3. a. Montrer que la suite de terme général v_n définie par $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ $(n > 0)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_1.
b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
c. En déduire également l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 4 $(7pts)$

Partie I :
Soit l'équation différentielle (1) : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

1. Déterminer une solution de (1) de la forme $f_1(x) = e^{rx}$ où r est un nombre réel.

2. Montrer que la fonction f_2 telle que $f_2(x) = xe^{rx}$ est aussi une solution de (1) (r étant la valeur trouvée précédemment)

3. a. Vérifier que pour tout couple de réels (λ_1, λ_2) la fonction $f_\lambda = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de (1).
b. Calculer λ_1 et λ_2 pour que $f_\lambda(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f'_\lambda(0) = \dfrac{1}{2}$.

Partie II :
f et g sont les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(-x+1) \text{ et } g(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}(x+1)$$

(C) et (Γ) leurs courbes représentatives.
On se propose de trouver les points d'intersection de (C) et (Γ) dont l'abscisse α est strictement positive.

1. Montrer que α est nécessairement strictement inférieur à 1.

2. Soit φ une fonction de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$ définie par: $\varphi(x) = -4x + \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
a. Montrer que α est solution de l'équation $\varphi(x) = 0$.
b.Etudier les variations de φ.
c. En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution qui est comprise entre $0,95$ et $0,96$.

3. Conclure.